RECHERCHES
SUR
LE MOUVEMENT DES RIVIERES.
PAR M. EULER.

§. 1.

C'eſt peu de choſe que ce que les Auteurs ont écrit juſqu'ici ſur le mouvement des rivieres; & tout ce qu'ils en ont dit, n'eſt fondé que ſur des hypotheſes arbitraires, & ſouvent même tout à fait fauſſes. Car, quoiqu'on ait déjà aſſez bien réuſſi à appliquer les principes de mécanique au mouvement des eaux; on s'eſt pourtant borné à ne conſiderer que les cas, où l'eau coule par des tuyaux d'une figure qui n'eſt pas irréguliere; & dans cette conſidération on a même ſuppoſé, que toutes les particules de l'eau, qui ſe trouvent dans la même ſection faite perpendiculairement au tuyau, ſe meuvent d'un mouvement égal; de ſorte que les viteſſes de l'eau en chaque ſection du canal ſoient réciproquement proportionelles aux amplitudes. Et c'eſt cette regle, qui ſert de baſe à toutes les recherches qui ont été faites juſqu'ici ſur le mouvement des eaux. Les profondes ſpéculations de Mrs. Bernoulli & d'Alembert, auxquels on eſt redevable de tout ce qui a été découvert juſqu'ici dans cette ſcience, ſont toutes établies ſur cette hypotheſe: & il faut avouer que, dans tous les cas, où ils ont appliqué leur théorie, cette hypotheſe ſe trouve fort bien d'accord avec la vérité.

§. 2. Mais, lorsque le mouvement de l'eau eſt tel, que ſes viteſſes ne ſe reglent pas uniquement ſur l'amplitude du canal, par le-

quel l'eau coule, de ſorte que les viteſſes dans la même ſection du canal ſont différentes entr'elles; alors il eſt impoſſible d'y appliquer les principes hydrodynamiques, dont on s'eſt ſervi avec un ſi bon ſuccès dans les recherches mentionnées. Cela arrive pour la plûpart, lorsque les canaux, par lesquels l'eau paſſe ſont fort larges; car alors on s'écarteroit trop conſidérablement de la vérité, ſi l'on ſuppoſoit que l'eau paſſat d'un mouvement égal par chaque ſection du canal. Or on comprend aiſément, qu'il faut rapporter ici le mouvement des rivieres; car, dans la même ſection qu'on conçoit faite perpendiculairement au lit de la riviere, l'eau peut avoir des viteſſes fort différentes; & il eſt évident, que les particules d'eau qui ſe trouvent vers le fond du lit, ſont pouſſées par des forces tout à fait différentes, que les particules ſupérieures: d'où il doit néceſſairement réſulter un mouvement très différent dans les particules qui ſe trouvent dans la même ſection du lit.

§. 3. Donc, pour chercher le mouvement de l'eau dans une riviere, il faut abandonner les hypotheſes auxquelles on a attaché juſqu'ici toutes les recherches hydrauliques, pour remonter aux premiers principes de Mécanique, par leſquels tous les mouvemens des corps tant ſolides que fluides ſont déterminés. Il faut conſidérer ſéparément chaque particule d'eau, & chercher toutes les forces auxquelles elle eſt aſſujettie, pour en déterminer les changemens cauſés dans ſon mouvement. Cette recherche étant extrémement difficile & enveloppée en des calculs très embarraſſés, je me bornerai à commencer l'explication de cette théorie par un cas, qui ſervira de fondement à tous les autres, & qui ne laiſſera pas de nous fournir des éclairciſſemens fort importans dans cette matiere. Après le dévelopement de ce cas, il ne ſera pas même fort difficile de rendre la recherche plus générale, & de l'appliquer à tous les cas qui ſe peuvent rencontrer.

§. 4. Je conſidérerai donc une ſection verticale faite le long d'une riviere qui nous repréſentera une riviere infiniment étroite; & quand j'aurai déterminé le mouvement de l'eau dans cette ſection, quoique je n'aye pas eu égard à l'action de l'eau, qui ſe trouve à côté

de

de part & d'autre, on conviendra, que ce mouvement ne différera pas beaucoup du vrai, quelque large que ſoit la riviere, pourvu que la figure de ſon lit ne ſoit pas extrémement irréguliere. Car je ſuppoſe pour le commencement que les preſſions de l'eau à côté ſont égales de part & d'autre, de ſorte que toutes les particules d'eau qui ſe trouvent dans cette ſection, ſe meuvent toujours ſelon des directions ſituées dans cette même ſection. Néanmoins la méthode dont je me ſervirai, ſe pourra auſſi aiſément appliquer aux cas, où l'eau paſſe d'une telle ſection verticale dans une autre; & quand on aura trouvé moyen d'expédier le calcul pour le cas que je m'en vai traiter, on parviendra d'autant plus facilement à bout du calcul qui renferme la ſolution générale.

§. 5. Soit donc AC le lit d'une telle ſection de riviere, ou d'une riviere infiniment étroite, qui ait partout la même largeur infiniment petite. Que ce lit AC ſoit une ligne courbe quelconque, qui eſt ſuppoſée être connue; pour cet effet je conçois une ligne horizontale EF qui ſerve d'axe pour y rapporter la ligne AC par des coordonnées orthogonales EP & PQ. Que ABCD ſoit la riviere, qui ſe meut ſur ce lit AC, & BD ſa ſuperficie ſupreme; de plus je ſuppoſe, que la riviere ſe trouve déjà dans un état permanent ou d'équilibre, de ſorte que ſa ſuperficie BD demeure continuellement la même, & qu'aux mêmes points, comme M, les particules d'eau qui y paſſent ayent toujours les mêmes viteſſes, & qu'elles ſoient aſſujetties aux mêmes preſſions. Fig. 1.

§. 6. Toute l'eau qui forme la riviere doit avoir paſſée par la ſection AB, que je conſidere ici comme la principale, & par rapport à laquelle je déterminerai tant le lieu que le mouvement de chaque particule d'eau après un tems quelconque, depuis qu'elle eſt paſſée par la ſection AB. Soit la hauteur de cette ſection $AB = a$, dans laquelle je conſidere un point quelconque O, nommant $AO = z$, & que OMG ſoit le chemin que chaque particule d'eau, qui paſſe par le point O, décrit étant emportée par ſon mouvement. Ici il faut d'abord regarder le mouvement dont chaque particule d'eau paſſe

paſſe par le point O. Ce mouvement étant décompoſé ſelon la direction horizontale & verticale, ſoit m la viteſſe ſelon la direction horizontale, & n la viteſſe ſelon la direction verticale, que je ſuppoſe dirigée de haut en bas. Donc, nommant $EA = b$, de ſorte que $EO = b + z$, après un tems infiniment petit $= d\tau$, le point d'eau O avancera ſelon la direction horizontale par l'eſpace $= m\,d\tau$, & ſelon la direction verticale par l'eſpace $= n\,d\tau$. Par conſéquent après le tems $d\tau$, le point O parviendra en o, en ſorte qu'ayant tiré la verticale oe, il ſoit $Ee = m\,d\tau$, & $eo = b + z - n\,d\tau$. Or on voit bien que m & n ſont de certaines fonctions de z.

§. 7. Qu'après un tems quelconque $= t$, le point d'eau qui eſt paſſé par O ſoit parvenu en M, ayant décrit pendant ce tems t la ligne OM. Qu'on tire de M ſur EP la perpendiculaire MP, & nommant $EP = x$; $PM = y$; on voit que x & y ſeront des fonctions de deux variables t & z. Soit donc pour exprimer la dépendance de ces deux variables,

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \qquad \& \quad dy = R\,dt + S\,dz,$$

où l'on voit que ces formules différentielles doivent être completes, ou que $\frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dt}$, & $\frac{dR}{dz} = \frac{dS}{dt}$, où $\frac{dP}{dz}$, marque le différentiel de P, en ne ſuppoſant que z variable, diviſé par dz, & $\frac{dQ}{dt}$, le différentiel de Q, en ne ſuppoſant que t variable, diviſé par dt, & ainſi des autres. On voit auſſi que ces valeurs de x & y, en poſant $z = 0$, doivent exprimer la figure du lit AC: puiſque l'eau qui paſſe par le point A, doit gliſſer ſur le lit même. Or, ſi nous poſons $z = a$, ces mêmes formules de x & y exprimeront la figure de la ſuperficie d'eau BD, ou la ſurface de la riviere.

§. 8. Il eſt encore à remarquer, que, lorſqu'on met $t = 0$, le point M doit retomber en O. Donc, les fonctions de t & z qui expriment les valeurs de x & y doivent être telles, que ſi l'on

met

met $t = 0$, il devienne $x = 0$, & $y = b + z = EO$. De plus, puisque $dx = P\,dt + Q\,dz$, & $dy = R\,dt + S\,dz$: ſi nous mettons $t = 0$, & que nous prenions z pour conſtante, ou $dz = 0$, faiſant $dt = d\tau$, ces différentiels donneront le lieu du point o, auquel parvient le point O dans le tems $d\tau$; il ſera donc, poſant $t = 0$, dans les quantités P & R, $Ee = P\,d\tau$, & $eo = b + z + R\,d\tau$. Comparant ces valeurs avec celles, que nous avons trouvées en haut, nous aurons $P = m$, & $R = -n$, de ſorte que les fonctions P & R, poſant $t = 0$, doivent donner les viteſſes horizontale & verticale du point O.

§. 9. Pour trouver la ligne OMG, que toutes les particules d'eau, qui paſſent par le point O, repréſentent dans la riviere, puiſqu'il faut regarder ce point O comme fixe dans la ſection AB, nous aurons $dz = 0$; donc la nature de la ligne OMG ſera contenue dans ces formules:

$$dx = P\,dt, \qquad \& \quad dy = R\,dt,$$

qui donnent à connoître que, dans l'élément de tems dt, le point M parvient en m, en ſorte que $Pp = P\,dt$, & $pm = y + R\,dt$. De là on connoit le mouvement du point M dont il eſt tranſporté en m pendant le tems dt. Car, ſi nous nommons la viteſſe horizontale du point $M = v$, & ſa viteſſe verticale $= u$ dirigée en bas, après le tems dt il doit être $Pp = v\,dt$, & $pm = y - u\,dt$, & partant nous aurons $v = P$, & $u = -R$. Ainſi connoiſſant les fonctions P, Q, R, S, dans les formules générales:

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \quad \& \; dy = R\,dt + S\,dz,$$

les fonctions P & R expriment en même tems les viteſſes du point M, la horizontale v, & la verticale u.

§. 10. Donnons maintenant au point O une étendue infiniment petite $OO' = dz$, pour conſidérer tout le filet d'eau $OO'MM'GG'$, qui paſſe par cette ouverture $OO' = dz$: car il faut que ce filet demeure toujours continu, ſans qu'il s'y introduiſe aucun vuide.

Donc la viteſſe horizontale du point O' ſera $= u + du$, & la verticale $= n + dn$, ces quantités u & n étant des fonctions de z. Dans le tems $d\tau$ donc le point O' parviendra en e', en ſorte que $Ee' = (u + du)\,d\tau$, & $e'o' = b + z + dz - (n + dn)\,d\tau$. Par conſéquent, dans ce même tems $d\tau$, il paſſe par l'ouverture $OO' = dz$, la maſſe d'eau $OO'o'o$, dont le volume ſe trouvera en cette maniere

L'aire du trapeze $EO'o'e$ étant $= \frac{1}{2} Ee'(EO' + e'o')$,

- - du trapeze $EOoe$ - - $= \frac{1}{2} Ee\,(EO + eo)$,

- - du trapeze $eo\,o'e'$ - - $= \frac{1}{2}\, e\,e'\,(eo + e'o')$,

d'où l'on tire l'aire

$$OO'o'o = \tfrac{1}{2}Ee'(EO' + e'o') - \tfrac{1}{2}Ee(EO + eo) - \tfrac{1}{2}ee'(eo + e'o')$$
$$= \tfrac{1}{2}Ee(OO' + e'o' - eo) + \tfrac{1}{2}\,e\,e'(EO' - eo),$$

& partant elle ſera $= u dz d\tau + \frac{1}{2} du dz d\tau - \frac{1}{2} u du d\tau^2 + \frac{1}{2} n du d\tau^2$.

§. 11. Après un tems t, le point O venant en M, de ſorte que $EP = x$, $PM = y$, le point O' parviendra en M', de ſorte que $EP' = x + Q dz$, & $P'M' = y + S dz$, & encore après un tems infiniment petit $d\tau$, ces points M & M' ſeront tranſportés en m & m', de ſorte qu'il ſera $Ep = x + P d\tau$, $pm = y + R d\tau$, & $Ep' = x + P d\tau + Q dz$, $p'm' = y + R d\tau + S dz$. Donc la maſſe $OO'o'o = u dz d\tau$, ſera parvenue après le tems $= t$, en $MM'm'm$, ou elle remplira cet eſpace: c'eſt pourquoi il faut que l'aire $MM'm'm$ ſoit égale à $OO'o'o = u dz d\tau$. Or, pour trouver cette aire, on n'a qu'à chercher ces 4 trapezes.

$$PMmp = \tfrac{1}{2} Pp(PM + pm) = \tfrac{1}{2} P d\tau (2y + R d\tau),$$
$$P'M'm'p' = \tfrac{1}{2} P'p'(P'M' + p'm') = \tfrac{1}{2} P d\tau (2y + R d\tau + 2S dz),$$
$$PMM'P' = \tfrac{1}{2} PP'(PM + P'M') = \tfrac{1}{2} Q dz (2y + S dz),$$
$$pmm'p' = \tfrac{1}{2} pp'(pm + p'm') = \tfrac{1}{2} Q dz (2y + 2R d\tau + S dz),$$

&

& puisque $MM'm'm = P'M'm'p' + PMM'P' - pmm'p' - PMmp$, nous aurons $MM'm'm = PSd\varpi d\tau - QRd\varpi d\tau$. Donc il faut qu'il ſoit $PS - QR = m$; & c'eſt la premiere condition à laquelle il faut ſatisfaire.

§. 12. Cette condition que nous venons de trouver, renferme la continuité du fluide, en vertu de laquelle il faut donc que $PS - QR$, ſoit égale à m, c'eſt à dire à une fonction de ϖ, où le tems t n'entre point. Or le premier état en AB, nous découvre encore d'autres propriétés, que les fonctions P, Q, R, S, doivent avoir. Car, faiſant varier au point O tant ϖ, que le tems t, pour parvenir au point o', nous aurons $Ee' = nd\tau$, & $e'o' = b + \varpi - n.\tau$, où $d\tau$ marque l'élément du tems t, qui lui-même eſt dans ce cas $= o$. Donc, ſi $t = o$, il faut qu'il ſoit $dx = nd\tau + od\varpi$, & $dy = -nd\tau + d\varpi$. Or, ayant ſuppoſé en général $dx = Pd\tau + Qd\varpi$, & $dy = Rd\tau + Sd\varpi$, il eſt requis que poſant $t = o$, il devienne:

$$P = m; \quad Q = o; \quad R = -n; \quad \& \; S = 1.$$

Ces conditions jointes à celle que $PS - QR = m$, & que les formules différentielles $Pd\tau + Qd\varpi$, & $Rd\tau + Sd\varpi$, doivent être compiettes, ou intégrables, déterminent déjà en partie la nature de ces fonctions; & outre cela il faut que, poſant $\varpi = o$, les coordonnées x & y expriment la nature de la ligne du lit AC.

§. 13. Maintenant, pour trouver l'accelération de l'élément d'eau $MM'm'm$, dont la maſſe eſt $= m d\varpi d\tau$, il faut avoir égard aux forces qui y agiſſent. Ces forces, ſont premierement le poids de cet élément, que j'exprimerai par ſon volume $m d\varpi d\tau$, & par cette force cet élément eſt pouſſé en bas. Enſuite, ce même élément eſt aſſujetti aux preſſions des particules d'eau dont il eſt environné; & ces preſſions s'expriment le plus commodément par la hauteur d'une colonne d'eau, qui exerceroit la même preſſion. Soit donc p la hauteur qui exprime la preſſion au point M, & p ſera une certaine fonction des coordonnées x & y, ou bien des variables t & ϖ; &

pour repréſenter cette dépendance, ſoit $dp = M dt + N dz$. De là on connoitra les preſſions aux points M′, m, & m'; car on aura la preſſion en M′ $= p + N dz$; en $m = p + M dt$, & en $m' = p + N dz + M d\tau$, poſant $d\tau$ pour dt; comme nous avons fait auparavant en conſidérant ces points.

§. 14. Donc, ſur la face MM′ agira une force $= MM'(p + \frac{1}{2} N dz)$ ſur la face Mm une force $= Mm(p + \frac{1}{2} M d\tau)$, ſur la face M′$m'$ une force $= M'm'(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$, & ſur la face mm' une force $= mm'(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$. Décompoſons ces forces ſelon les direction de coordonnées EP, EA, car puiſque ces forces agiſſent perpendiculairement ſur les faces, la réſolution donnera :

La force ſur	donne les forces ſelon EP	ſelon EA
$MM' = MM'(p + \frac{1}{2} N dz)$;	$+ S dz (p + \frac{1}{2} N dz)$;	$- Q dz (p + \frac{1}{2} N dz)$,
$Mm = Mm(p + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$- R d\tau (p + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$+ P d\tau (p + \frac{1}{2} M d\tau)$,
$mm' = mm'(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$;	$- S dz (p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$;	$+ Q dz (p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$,
$M'm' = M'm'(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$+ R d\tau (p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$- P d\tau (p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$.

Donc, prenant toutes ces forces enſemble, l'élément $MM'm'm$, en ſera pouſſé ſelon la direction horizontale EP par la force $= - MS dz d\tau + NR dz d\tau$; & ſelon la direction verticale EA, ou en haut par la force $= MQ dz d\tau - NP dz d\tau$; de celle-ci il faut donc retrancher la force de la gravité de cet élément, qui eſt $= PS dz d\tau - QR dz d\tau = m dz d\tau$.

§. 15. La maſſe $MM'm'm = m dz d\tau$, étant ſollicitée par deux forces, l'une ſelon l'horizontale EP, qui eſt $= (NR - MS) dz d\tau$, & l'autre ſelon la verticale EA en haut, qui eſt $= (MQ - NP) dz d\tau - m dz d\tau$,

la force accélératrice ſelon la direction EP ſera $= \frac{NR - MS}{m}$, &

la force accélératrice ſelon la direction EA ſera $= \frac{MQ - NP}{m} - 1$.

Par

Par conſéquent, le point M ſera accéléré par ces deux forces accélératrices. Donc, prenant z conſtant, & l'élément du tems dt également conſtant, ſelon les principes de l'accélération, nous aurons:

$$\frac{NR - MS}{m} = \frac{2d.dx}{dt^2}, \quad \& \quad \frac{MQ - NP}{m} - 1 = \frac{2ddy}{dt^2}.$$

Or, ayant $dx = Pdt + Qdz$, & $dy = Rdt + Sdz$, ſi nous poſons $dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz$, & $dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz$; il ſera $ddx = \mathfrak{P}dt^2$, & $ddy = \mathfrak{R}dt^2$, d'où nous tirons enfin ce deux équations

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \quad \& \quad MQ - NP - m = 2m\mathfrak{R}.$$

§. 16. Pour déterminer donc le mouvement de la riviere ABCD, qui eſt formée par l'eau qui decoule continuellement par la ſection $AB = a$, ſur le lit AC, dont la figure eſt donnée, ayant pris la ligne horizontale EF pour axe, & nommant $AE = b$, ſoit parvenu une particule d'eau, qui paſſe par O, poſant $AO = z$, après un tems écoulé $= t$ en M, & qu'on nomme les coordonnées $EP = x$, & $PM = y$, ces quantités x & y ſeront certaines fonctions des variables t & z. Soit donc

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz,$$

où P, Q, & R, S, ſont telles fonctions de t & z, que ces formules différentielles ſoient intégrables. Or, pour les fonctions P & R, ſoit de plus:

$$dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz, \quad \& \quad dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz.$$

Enfin, ſoit la preſſion de l'eau au point M exprimée par la hauteur $= p$, qui étant pareillement une fonction des variables t & z, ſoit

$$dp = Mdt + Ndz.$$

§. 17. Il s'agit donc de trouver les fonctions P, Q, R, S, M, & N; & pour cela il faut ſatisfaire aux conditions ſuivantes.

1) Les coordonnées x & y doivent être telles fonctions de t & z, que lorsqu'on met $z = 0$, elles expriment la figure du lit AC; ainſi, poſant $z = 0$, on aura pour la figure du lit AC ces formules $dx = P\,dt$, & $dy = R\,dt$. Or, lorsqu'on met $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = b + z$.

2) Le mouvement de l'eau, qui coule par le point O étant ſuppoſé tel, que ſa viteſſe ſelon la direction horizontale ſoit $= m$, & ſa viteſſe ſelon la direction verticale dirigée en bas $= n$, il faut qu'il ſoit poſant $t = 0$;

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad S = 1,$$

où m & n ſeront des fonctions de la ſeule variable z, ſans renfermer l'autre t.

3) La troiſieme condition exige, qu'il ſoit en général: $PS - QR = m$, où $PS - QR$ doit être une fonction de la ſeule variable z, ſans qu'il y entre l'autre variable t.

4) La conſidération de l'accélération nous a fourni ces équations, auxquelles il faut ſatisfaire:

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \text{ \& } MQ - NP = 2m\mathfrak{R} + m.$$

5) Enfin il eſt évident que la preſſion p doit être une telle fonction de t & z, que lorsqu'on met $z = a$, auquel cas la preſſion ſe rapportera à la ſuperficie BD, la valeur de p évanouiſſe. Donc il faut qu'il devienne $M = 0$, ſi l'on met $z = a$.

§. 18. Les formules de la quatrieme condition, puisqu'il eſt en vertu de la troiſieme $m = PS - QR$, donneront

$$M = -2P\mathfrak{P} - 2R\mathfrak{R} - R,$$
$$\text{\&} \quad N = -2Q\mathfrak{P} - 2S\mathfrak{R} - S,$$

& de là nous obtiendrons:

$$dp = \begin{matrix} -2P\mathfrak{P}\,dt - 2R\mathfrak{R}'dt - R\,dt, \\ -2Q\mathfrak{P}\,dz - 2S\mathfrak{R}\,dz - S\,dz. \end{matrix}$$

Mais

Mais, ayant $P\,dt + Q\,dz = dx$, & $R\,dt + S\,dz = dy$, il ſera

$$dp = -2\mathfrak{P}\,dx - 2\mathfrak{R}\,dy - dy.$$

Donc, puiſque cette formule doit être intégrable, il faut que $\mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{R}\,dy$, ſoit une formule différentielle complette.

§. 19. De là on peut encore tirer la condition ſuivante: Puiſque $\mathfrak{P}\,dt = dP - \mathfrak{Q}\,dz$, & $\mathfrak{R}\,dt = dR - \mathfrak{S}\,dz$, la ſubſtitution de ces formules donnera:

$$dp = \begin{matrix} -2P\,dP + 2P\mathfrak{Q}\,dz + 2R\mathfrak{S}\,dz \\ -2R\,dR - 2Q\mathfrak{P}\,dz - 2S\mathfrak{R}\,dz \end{matrix} - dy,$$

dont l'intégrale, entant qu'elle peut ſe prendre, ſera:

$$p = C - y - PP - RR + 2\int dz\,(P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} - R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}).$$

Donc il faut que la formule $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, ſoit une fonction de la ſeule variable z, puiſque ſans cela l'intégration ne pourroit avoir lieu.

§. 20. Soit donc $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w$, de ſorte que w marque une fonction de la ſeule variable z, & la preſſion en M ſera

$$p = C - y - PP - RR + 2\int w\,dz,$$

& $\int w\,dz$ ſera pareillement une fonction de z. Or, puiſque l'expreſſion de p doit évanouïr, ſi l'on met $z = a$, il faut que cette poſition $z = a$, faſſe évanouïr tous les t dans la formule, $y + PP + RR$, de ſorte qu'elle devienne une quantité conſtante. Et alors on n'aura qu'à déterminer C, en ſorte que p évanouïſſe dans ce cas $z = o$.

§. 21. Puiſque nous avons auſſi $PS - QR = m$, où m eſt pareillement une fonction de la ſeule z, ces deux équations:

$$PS - QR = m,$$
$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w,$$

pour-

pourront ſervir à éliminer Q & S: & on trouve

$$Q = \frac{PP\mathfrak{Q} + PR\mathfrak{S} - m\mathfrak{R} - wP}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$S = \frac{PR\mathfrak{Q} + RR\mathfrak{S} + m\mathfrak{P} - wR}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& ces valeurs doivent rendre intégrables les formules

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \quad \& \quad dy = R\,dt + S\,dz.$$

Or ſubſtituant ces valeurs trouvées en y introduiſant les formules $dP = \mathfrak{P}\,dt + \mathfrak{Q}\,dz$, & $dR = \mathfrak{R}\,dt + \mathfrak{S}\,dz$, nous aurons:

$$dx = \frac{PP\,dP + PR\,dR - m\mathfrak{R}\,dz - wP\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{PR\,dP + RR\,dR + m\mathfrak{P}\,dz - wR\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& l'une & l'autre de ces formules doit être intégrable.

§. 22. Toute la queſtion ſe réduit donc à la recherche de la nature de ces deux fonctions P & R, deſquelles dépendent les fonctions $\mathfrak{P}$ & $\mathfrak{R}$, afin que ces deux formules

$$dx = \frac{P(P\,dP + R\,dR) - m\mathfrak{R}\,dz - wP\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{R(P\,dP + R\,dR) + m\mathfrak{P}\,dz - wR\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

deviennent intégrables. Et lorſqu'on aura trouvé moyen de réſoudre ce probleme en général, il ne ſera plus difficile de déterminer ces fonctions en ſorte qu'elles ſatisfaſſent aux autres conditions. Or ce probleme eſt ſi difficile, que, quoiqu'il ne dépende que de l'analyſe, nous ne pouvons preſque eſpérer de parvenir jamais à la ſolution générale, qui pourroit ſervir à déterminer le mouvement de toute ſorte de rivieres.

§. 23.

§. 23. Ces difficultés m'obligent à m'arrêter à des cas particuliers, dont l'évolution pourra en même tems ſervir à nous montrer comme il faut s'y prendre, pour chercher la ſolution générale. Puiſque donc, poſant $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = b + z$, je ſuppoſerai

$$x = Vt + Att, \quad \& \; y = b + z + Zt + Btt,$$

où V & Z marquent des fonctions de la ſeule variable z. Nous aurons donc:

$$P = V + 2At; \qquad R = Z + 2Bt,$$

$$Q = \frac{tdV}{dz}; \qquad S = 1 + \frac{tdZ}{dz},$$

$$\mathfrak{P} = 2A; \qquad \mathfrak{R} = 2B,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{dV}{dz}; \qquad \mathfrak{S} = \frac{dZ}{dz}.$$

& par la ſeconde condition il ſera $m = V$; & $n = -Z$. Or la troiſieme condition donne

$$PS - QR = V + 2At + \frac{VtdZ}{dz} + \frac{2AttdZ}{dz} - \frac{ZtdV}{dz} - \frac{2BttdV}{dz},$$

& cette expreſſion doit être $= m = V$, d'où nous tirons ces deux équations:

$$2Adz + VdZ - ZdV = 0, \quad \& \; AdZ = BdV,$$

dont la derniere donne $Z = \frac{BV}{A} + C$, qui étant remiſe dans la premiere produit $2Adz - CdV = 0$, & partant $V = \frac{2Az}{C} + D$, donc $Z = \frac{2Bz}{C} + \frac{BD}{A} + C$.

§. 24. Changeons ces conſtantes, & ſoit $D = \frac{2Ac}{C}$; $A = \frac{1}{2}\alpha C$; $B = \frac{1}{2}\mathfrak{G}C$, pour avoir $V = \alpha(z + c)$; & $Z = C + \mathfrak{G}(z + c)$, & nos formules deviendront :

$x = \alpha(z+c)t + \frac{1}{2}\alpha Ctt$; $y = b + z + Ct + \mathfrak{G}(z+c)t + \frac{1}{2}\mathfrak{G}Ctt$,

$P = \alpha(z+c) + \alpha Ct$; $R = C + \mathfrak{G}(z+c) + \mathfrak{G}Ct$,

$Q = \alpha t$; $S = 1 + \mathfrak{G}t$,

$\mathfrak{P} = \alpha C$; $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}C$,

$\mathfrak{Q} = \alpha$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$,

De là nous obtiendrons la fonction de z, qui a été nommée $w = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, ce qui produit

$$w = \alpha\alpha(z+c) + \alpha\alpha Ct + \mathfrak{G}C + \mathfrak{G}\mathfrak{G}(z+c) + \mathfrak{G}\mathfrak{G}Ct, \quad - \alpha\alpha Ct - \mathfrak{G}C \quad - \mathfrak{G}\mathfrak{G}Ct,$$

$$\text{ou} \quad w = (\alpha\alpha + \mathfrak{G}\mathfrak{G})(z + c).$$

Car, puiſqüe les termes qui contenoient t ſe ſont détruits eux-mêmes, on n'a pas beſoin de réduction ultérieure.

§. 25. De là nous aurons donc $2fwdz = (\alpha\alpha + \mathfrak{G}\mathfrak{G})(zz + 2cz + cc)$, & la preſſion au point M deviendra

$$p = \text{Conſt.} - b - z - Ct - \mathfrak{G}(z+c)t - \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}Ctt + \alpha\alpha(z+c)^2 - \alpha\alpha(z+c)^2 - 2\alpha\alpha Ct(z+c) - \alpha\alpha CCtt + \mathfrak{G}\mathfrak{G}(z+c)^2 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}(z+c)^2 - 2\mathfrak{G}CCt - \mathfrak{G}\mathfrak{G}CCtt - 2C\mathfrak{G}(z+c) - 2\mathfrak{G}\mathfrak{G}Ct(z+c) - CC$$

ou

$$p = \text{Conſt.} - b - z - 2C\mathfrak{G}(z+c) - CC - (1 + 2\mathfrak{G}C)Ct - (\mathfrak{G} + 2\alpha\alpha C + 2\mathfrak{G}\mathfrak{G}C)(z+c)t - C(\tfrac{1}{2}\mathfrak{G} + \alpha\alpha C + \mathfrak{G}\mathfrak{G}C)tt.$$

Or cette expreſſion devant évanouir, poſant $z = a$, quelque valeur qu'obtienne la variable t, nous en tirerons trois équations

Conſt.

$$\text{Conſt.} = b + a + 2C\mathfrak{G}(a + c) + CC.$$
$$(1 + 2\mathfrak{G}C)C + (\mathfrak{G} + 2\alpha\alpha C + 2\mathfrak{G}\mathfrak{G}C)(a + c) = 0.$$
$$C(\tfrac{1}{2}\mathfrak{G} + \alpha\alpha C + \mathfrak{G}\mathfrak{G}C) = 0,$$

dont la derniere nous fournit deux ſolutions, que je développerai ſéparément.

§. 26. Soit donc pour la premiere ſolution $C = 0$; & la ſeconde donne $c = -a$; & la premiere Conſt. $= b + a$. Donc nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z - a)t, \quad \& \quad y = b + z + \mathfrak{G}(z - a)t,$$

& la preſſion $p = a - z - \mathfrak{G}(z - a)t$.

Puiſque z ne peut pas devenir plus grand que a, on voit bien qu'il faut prendre α négatif, de ſorte qu'il ſoit

$$x = \alpha(a - z)t, \quad \& \quad y = b + z - \mathfrak{G}(a - z)t,$$

& la preſſion $p = a - z + \mathfrak{G}(a - z)t$.

Poſant $z = 0$, la figure du lit AC dans ce cas ſera exprimée par ces formules $x = \alpha at$, & $y = b - \mathfrak{G}at$, d'où l'on connoit, que le lit AC ſera une ligne droite inclinée à l'horizon ſous un angle dont la tangente $= \frac{\mathfrak{G}}{\alpha}$.

§. 27. Pour le ſecond cas, nous aurons $C = \frac{-\mathfrak{G}}{2(\alpha\alpha + \mathfrak{G}\mathfrak{G})}$, d'où la ſeconde équation devient $(1 + 2\mathfrak{G}C)C = 0$, ou bien $\alpha\alpha\mathfrak{G} = 0$, il ſera donc ou α ou $\mathfrak{G} = 0$: s'il étoit $\mathfrak{G} = 0$, il ſeroit $C = 0$, comme dans le cas précédent, ſoit donc $\alpha = 0$; & il ſera $C = -\frac{1}{2\mathfrak{G}}$; & $\text{Conſt.} = b + a - a - c + \frac{1}{4\mathfrak{G}\mathfrak{G}} = b - c + \frac{1}{4\mathfrak{G}\mathfrak{G}}$: D'où nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z - \frac{t}{2\mathfrak{G}} + \mathfrak{G}(z + c)t - \tfrac{1}{4}tt,$$

& $p = o$. Or α étant $= o$, puisque $x = o$, l'eau en coulant par AB ne ſortira jamais de la perpendiculaire BAE.

§. 28. Dans ce cas donc l'eau couleroit perpendiculairement de haut en bas. Mais, ſi nous prenons $c = \infty$, afin que αc obtienne une valeur finie $= f$, & que nous poſions également $\mathfrak{G} = o$, en ſorte que $\frac{1}{2\mathfrak{G}} - \mathfrak{G}c = g$, il en réſultera le cas ſuivant

$$x = ft, \qquad \& \quad y = b + z - gt - \tfrac{1}{4}tt,$$

& la preſſion ſera partant $= o$. Donc, le lit n'étant pas preſſé, ce cas renferme le mouvement où l'eau tombe librement & ſelon une direction oblique quelconque. Or il eſt clair auſſi que, par toute la hauteur AB, l'eau doit paſſer avec la même viteſſe & ſelon la même direction, de ſorte que chaque particule d'eau décrive une parabole, tout comme ſi elle étoit ſéparée du reſte; puiſqu'elle n'en ſouffre aucune preſſion. Auſſi voyons-nous de nos formules, que la figure du lit, ou le chemin des particules qui paſſent par A, eſt une parabole compriſe dans ces formules

$$x = ft, \qquad \& \quad y = b - gt - \tfrac{1}{4}tt.$$

§. 29. Dans le premier cas, ayant poſé $C = o$, pour ſatisfaire à la ſeconde équation, au lieu de mettre $c = -a$, on peut auſſi faire $\mathfrak{G} = o$; & la premiere ſera Conſt. $= b + a$. Dans ce cas nous aurons:

$$x = \alpha(z + c)t, \qquad \& \quad y = b + z,$$

& $p = a - z$, où au lieu de $x = \alpha(z + c)t$, nous pouvons mettre $x = (\alpha z + \mathfrak{G})t$. Ici nous voyons que le lit AC devient une ligne horizontale de même que la ſuperficie BD: car chaque particule d'eau ſe mouvra uniformément dans une direction horizontale; & $\alpha z + \mathfrak{G}$ marque la viteſſe dont l'eau paſſe par le point O. Auſſi les diverſes parties d'eau n'agiront l'une ſur l'autre

tre qu'en vertu de leur peſanteur, de là vient que la preſſion $p = a - z$ eſt partout la même comme ſi l'eau étoit en repos. Dans ce cas donc, la ſurface de la riviere ſera parfaitement horizontale, & le mouvement de toutes les parties ſe fera horizontalement & ſera uniforme.

§. 30. Ayant trouvé $x = (\alpha z + \mathfrak{G})t$, la viteſſe de l'eau au point O ſeroit $= \alpha z + \mathfrak{G}$; mais on comprend aiſément que ce même cas doit ſubſiſter, de quelque maniere que varient les viteſſes aux divers points O. Auſſi voyons-nous que ces valeurs

$$x = Zt, \qquad \& \quad y = b + z,$$

où Z marque une fonction quelconque de z, ſatisfont également à toutes les conditions requiſes. Car ayant

$$P = Z; \quad Q = \frac{t\,dZ}{dz}; \quad R = 0; \quad S = 1, \quad \& \text{ de là}$$

$$\mathfrak{P} = 0; \quad \mathfrak{Q} = \frac{dZ}{dz}; \quad \mathfrak{R} = 0; \quad \mathfrak{S} = 0, \quad \text{il ſera}$$

$$m = PS - QR = Z = \text{à une fonction de } z,$$

$$w = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = \frac{Z\,dZ}{dz} = \text{à une fonction de } z,$$

d'où nous tirons la preſſion à un point quelconque M,

$$p = \text{Conſt.} - b - z - ZZ + 2\int Z\,dZ = a - z.$$

Ainſi une riviere peut ſubſiſter ſur un lit horizontal, lorsque toutes les particules d'eau ſe meuvent uniformément ſelon des directions horizontales d'eau, & la ſurface ſuprême demeurera horizontale. De plus, la preſſion de l'eau ſera partout la même que ſi toute l'eau étoit en repos.

§. 31. Voici donc trois diverſes valeurs des coordonnées x & y, qui ſatisfont aux conditions requiſes pour repréſenter le mouvement d'une riviere.

I. $x = ft$; $\quad y = b + z - gt - \frac{1}{4}tt$,

II. $x = a(a - z)t$; $\quad y = b + z + \mathfrak{C}(a - z)t$,

III. $x = Zt$; $\quad y = b + z$,

où Z marque une fonction quelconque de z.

Or le ſecond cas peut encore être rendu plus général, en poſant:

$$x = (a - z)Zt, \quad \& \; y = b + z + \mathfrak{C}(a - z)Zt;$$

& ce ſera de la conſidération de ces cas particuliers qu'on pourra eſpérer la ſolution générale.

RECHER-